REPASO ECUACIONES DIFERENCIALES

• ¿Como escribirla?

- Forma estandar

$$y' + P(x)y = q(x)$$

- Forma Normal

$$y' = q(x) - P(x)$$
$$y' = f(x,y)$$

• ¿Como se clasifican?

- Orden

El orden de una EDO es el orden de la mayor derivada en la ecuacion

$y' - 2xy^2 = 0$ Orden 1

$y'' - 5\,\text{Sen}x\, y' = \ln(x^2+1)$ Orden 2

- Linealidad

Los E.D pueden ser lineales o no lineales, ¿cuando ocurre?

• Lineal

1. La variable dependiente y y todas sus derivadas son grado 1.
2. Los coeficientes dependen de la variable independiente x

• No lineal

No cumple lo anterior, incluye terminos no lineales

y^2 = termino no lineal

Sen y = funcion no lineal de y

$y' - 2xy^2 = 0$ No lineal

$y'' - 5y'\,\text{Sen}x = \ln(x^2+1)$ Lineal

$(1-y)y' + 2y = e^x$ No lineal

$y'' + \text{Sen}\,y = 0$ No lineal

$\frac{d^4y}{dx^4} + y^2 = 0$ No lineal

¿Cual es una Solucion?

Es una funcion w que al remplazarla junto con sus derivadas en la EDO logra una identidad

$$y' - 2xy^2 = 0 \quad ; \quad y = \frac{1}{4-x^2}$$

1. Hallamos la derivada

$$y' = (4-x^2)^{-1}$$
$$y' = -1(4-x^2)^{-2}(-2x)$$
$$y' = \frac{2x}{(4-x^2)^2}$$

2. Remplazamos

$$\frac{2x}{(4-x^2)^2} - 2x\frac{(1)^2}{(4-x^2)^2} = 0$$

$$\frac{2x}{(4-x^2)^2} - \frac{2x}{(4-x^2)^2} = 0$$

$$0 = 0$$

Identidad

• Problemas de valor inicial (PVI)

Ecuaciones con condiciones predeterminadas o dadas

$$\frac{dy}{dt} = -y + 5 \quad ; \quad y(0) = y_0$$

• Separamos variables

$$\frac{dy}{y-5} = -dt$$

• Integramos

$$\int \frac{dy}{y-5} = -\int dt$$

$$\ln|y-5| = -t + c$$

• Hallamos la Ecuacion

$$y - 5 = e^{-t+c}$$

$$\boxed{y = e^{-t+c} + 5}$$

Familia de soluciones

• Utilizamo los V.I

$$y_0 = e^c + 5$$
$$y_0 - 5 = e^c$$
$$\ln|y_0 - 5| = c$$

• Remplazamos la constante

$$e^{-t} \cdot e^{\ln|y_0-5|} + 5 = y$$

$$\frac{y_0 - 5}{e^t} + 5 = y$$

• Teorema de existencia y unicidad

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y)$$

$$y' = f(x,y)$$

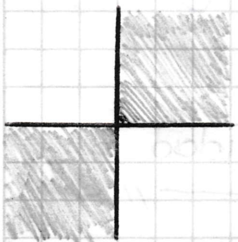
Aplica para este tipo de ecuaciones

1. Analizamos dominio $f(x,y)$
2. Hallamos derivada parcial con respecto a y
3. Analizamos dominio de $\partial f/\partial y$
4. Intersectamos Dominios

① $\frac{dy}{dx} = \sqrt{xy}$

$y' = \sqrt{xy}$

$\text{Dom } f(x,y) \;=\; \{x, y \in \mathbb{R}^2 \;/\; xy \geq 0\}$

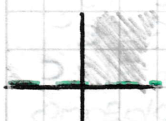


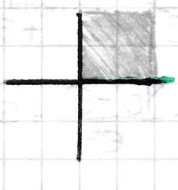
② $\frac{\partial f}{\partial y} = \sqrt{xy}$

$= (xy)^{1/2}$

$= \frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{y}}$

③ $\text{Dom}(\partial f/\partial y) \;=\; \{x, y \in \mathbb{R}^2 / x \geq 0 \wedge y > 0\}$



④ 

$I = \{x, y \in \mathbb{R}^2 \; x \geq 0 \wedge y > 0\}$

• E.D.O Autonomas

$$\frac{dy}{dx} = f(y)$$

No aparece la variable independiente (x)

$$y' = f(y)$$

Se busca una solucion de equilibrio:

- Asintoticamente estable
  Punto critico "atractor"

- Semiestable

- Inestable
  Punto critico repulsor

1. Analizamos puntos criticos igualando $(f(y)=0)$ a cero
2. Analizamos los puntos criticos de la primera derivada $((f(y))' \neq 0)$
3. Analizamos signo primera derivada (Crecimiento)
4. Analizamos signo segunda derivada (Concavidad)

$y' = y^2(4-y^2)$

$f(y) = y^2(4-y^2)$

$y^2(4-y^2) = 0$

$y^2(2-y)(2+y) = 0$

$y=0,\ y=2,\ y=-2$

$y' = 4y^2 - y^4$

$= 8y - 4y^3$

$y=0,\ y=2,\ y=-2$

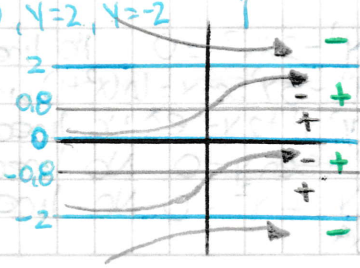
$y'' = -12y^2 + 8$

$y = 0{,}8 \quad y = -0{,}8$

$y=2$ Atractor

$y=0$ Semiestable

$y=-2$ repulsor



• EDO SEPARABLES

$$y' = g(x)\cdot h(y)$$

$$\frac{dy}{dx} = g(x)\cdot h(y)$$

1. Se busca separar las variables
2. Se agrupan a un lado todo lo que tenga "y" y al otro todo lo que tenga "x"
3. Se integra, sin olvidar la constante
4. Se despeja "y" para dar la familia de soluciones

• $\frac{dy}{dt} = -y+5$

• $\frac{dy}{5-y} = +dt$

• $\int \frac{dy}{-5+y} = \int -dt$

• $\ln|y-5| = -t+C$

$y-5 = e^{-t}\cdot e^{c}$

$y-5 = Ce^{-t}$

• $y = Ce^{-t}+5$

• EDO LINEALES DE 1er ORDEN

$$y' = -P(x)+q(x)$$

$$y' + P(x)y = q(x)$$

{Cualquier EDO desde que sea lineal}

1. Poner la EDO en forma estandar
2. Identifique $P(x)$
3. Determine factor integrante (F.I)

$$B = e^{\int P(x)dx}$$

4. Multiplique la ecuacion en forma estandar por el (F.I)
5. Recuerde que

$$B\cdot[y'+P(x)y]$$

es igual a

$$\frac{d}{dx}[y\cdot B]$$

6. Integre a ambos lados de la ecuación

• $y'-3y=6$

• $P(x)=-3$

• $B = e^{\int -3dx} = e^{-3x}$

• $e^{-3x}\cdot y' - 3ye^{-3x} = e^{-3x}\cdot 6$

• $\frac{d}{dx}\, e^{-3x}y = e^{-3x}\cdot 6$

• $\int \frac{d}{dx} e^{-3x}\cdot y = \int 6e^{-3x}$

$e^{-3x}y = -2e^{-3x}+C$

$y = Ce^{3x}-2$

• EDO Bernoulli

$$y'+P(x)y = q(x)y^n$$

$$n\neq 0,\ n\neq 1$$

1. Poner la EDO en forma estandar
2. Divida la ecuacion en y^n
3. Utilize la sustitucion $u = y^{1-n}$
4. Identifique patrones y sustituya
5. Obtendra una EDO lineal, resuelva.
6. Vuelva a la variable original

$y' = y(xy^3-1)$

• $y' = y^4x - y$

$y'+y = xy^4$

• $y'\cdot y^{-4} + yy^{-4} = x$

$y'\cdot y^{-4} + y^{-3} = x$

• $u = y^{1-4}$, $u = y^{-3}$ | $\frac{du}{dx} = -3y^{-4}\frac{dy}{dx}$

$\frac{1}{-3}\frac{du}{dx} = y^{-4}\cdot y'$

• $\frac{u'}{-3} + u = x$

$u' - 3u = -3x$

$B = e^{\int -3dx} = e^{-3x}$

$e^{-3x}\cdot u' - 3ue^{-3x} = -3x\cdot e^{-3x}$

$\int \frac{d}{dx} ue^{-3x} = \int -3x\, e^{-3x}$

$ue^{-3x} = -3\left[\frac{1}{9}(-3x-1)e^{-3x}\right]$

$ue^{-3x} = \frac{1}{3}(3x+1)e^{-3x} + C$

$u = \frac{3x+1}{3} + \frac{C}{e^{-3x}}$

$\frac{1}{y^3} = \frac{3x+1}{3}+\frac{C}{e^{-3x}}$

$y^3 = \frac{3e^{-3x}}{(3x+1)e^{-3x}+3C}$

• EDO HOMOGENEA

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

Es homogenea de grado "n" si M y N son homogeneas de grado "n"

Es homogenea cuando todos los terminos son del mismo grado (C^n, x^n, y^n)

1. Verifique que M y N son homogeneas del mismo grado

$$M(tx,ty) = M(tx,ty)$$
$$= t^n M(x,y)$$

$$N(tx,ty) = N(tx,ty)$$
$$= t^n N(x,y)$$

2. Analice patrones y encuentre la sustitución adecuada

$u = y/x$ ó $u = x/y$

$y = ux$ | $x = uy$

$\frac{dy}{dx} = \frac{x\,du}{dx} + \frac{u\,dx}{dx}$ | $\frac{dx}{dy} = \frac{y\,du}{dy} + \frac{u\,dy}{dy}$

$\frac{dy}{dx} = x\frac{du}{dx} + u$ | $\frac{dx}{dy} = \frac{y\,du}{dy} + u$

3. Sustituya, obtendra una EDO separable, resuelva
4. Vuelva a la variable original

$$(x^3 - y^3)dx + (xy^2)dy = 0$$

- Homogeneas grado 3
- Dividimos en "x^3" toda la ecuacion

$$\left(\frac{x^3}{x^3} - \frac{y^3}{x^3}\right)dx + \left(\frac{xy^2}{x^3}\right)dy = 0$$

$$\left(1 - \left(\frac{y}{x}\right)^3\right)dx + \left(\frac{y}{x}\right)^2 dy = 0$$

$u = y/x \qquad y = ux$

$dy = x\,du + u\,dx$

- $(1-u^3)dx + u^2(x\,du + u\,dx)$

$dx - u^3 dx + u^2 x\,du + u^3 dx = 0$

$dx\,(1 - \cancel{u^3} + \cancel{u^3}) + u^2 x\,du = 0$

$dx = -u^2 x\,du$

$\int \frac{dx}{x} = -\int u^2\,du$

$\ln|x| = -\frac{u^3}{3} + C$

- $\ln|x| = \frac{-x^3}{3y^3} + C$

$$y^3 = \frac{-x^3}{3(\ln|x| - C)}$$

• EDO EXACTAS

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

$$M_y = N_x$$

$$F(x,y) = C$$

1. Compruebe que $M_y = N_x$
2. Recuerde que la solucion es $F(x,y) = C$
3. Recuerde que M y N son las derivadas parciales de F

I. $\frac{\partial f}{\partial x} = M$ II. $\frac{\partial f}{\partial y} = N$

4. Analice cual derivada parcial es mas facil de integrar
5. Integre recordando que la constante obtenida es la otra funcion

I. $\int \frac{\partial f}{\partial x} dx = \underbrace{\square + g(y)}_{C}$

II. $\int \frac{\partial f}{\partial y} dy = \underbrace{\square + h(x)}_{C}$

6. Halle la funcion obtenida en la integral derivando respecto a la misma

I. $\frac{\partial f}{\partial y} = \square' + g'(y)$

II. $\frac{\partial f}{\partial x} = \square' + h'(x)$

7. Despeje la funcion incognita e integre

I. $\int g'(y) = g(y)$

II. $\int h'(x) = h(x)$

8. Remplace y reescriba la solucion

I. $f(x,y) = \square + g(y)$

II. $f(x,y) = \square + h(x)$

$(y^2\cos x - 3x^2y - 2x)dx + (2y\,\text{sen}x - x^3 + \ln y)dy = 0$

- $M(x,y) = y^2\cos x - 3x^2y - 2x$
  $N(x,y) = 2y\,\text{sen}x - x^3 + \ln y$

- $M(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}$

  $N(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}$

- $M = y^2\cos x - 3x^2y - 2x$
  $M_y = 2y\cos x - 3x^2$

  $N = 2y\,\text{sen}x - x^3 + \ln y$
  $N_x = 2y\cos x - 3x^2$

  $N_x = M_y$ ✓

- $\int M\,dx$

  $\int y^2\cos x - 3x^2y - 2x\,dx$

  $y^2\,\text{sen}x - x^3y - x^2 + g(y)$

- $2y\,\text{sen}x - x^3 + g'(y)$

  $\frac{\partial f}{\partial y} = 2y\,\text{sen}x - x^3 + g'(y)$

$\cancel{2y\,\text{sen}x - x^3} + \ln y = \cancel{2y\,\text{sen}x - x^3} + g'(y)$

$\int \ln y = \int g'(y)$

$y\ln y - y + c = g(y)$

- $y^2\,\text{sen}x - x^3y - x^2 + y\ln y - y + c = c$

$\boxed{y^2\,\text{sen}x - x^3y - x^2 + y\ln y - y = K}$

- # EDO REDUCIBLES A EXACTAS

$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$

$M_y \neq N_x$

1. Compruebe que $M_y \neq N_x$
2. Recuerde que la solución es $f(x,y) = C$
3. Halle el factor integrante más conveniente

$\frac{M_y - N_x}{N}$ ó $\frac{N_x - M_y}{M}$

$e^{\int \frac{M_y - N_x}{N}}$ ó $e^{\int \frac{N_x - M_y}{M}}$

4. Multiplique la ecuación original por el factor integrante escogido
5. Obtendrá una EDO Exacta, resuélvala

$y\,dx + (2xy - e^{-2y})dy = 0$

- $M_y = 1$ $\quad M_y \neq N_x$
  $N_x = 2y$

- $\frac{2y - 1}{y}$

$e^{\int \frac{2y-1}{y}} = e^{-\ln y + 2y}$

$= e^{\ln(y^{-1})} \cdot e^{2y}$

$= \frac{e^{2y}}{y}$

- $e^{2y}dx + (2xe^{2y} - \frac{1}{y})dy = 0$

$M_y = 2e^{2y}$
$N_x = 2e^{2y}$

$\frac{\partial f}{\partial x} = e^{2y}$ $\quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2xe^{2y} - \dots$

$\frac{\partial f}{\partial x} = M$

$\frac{\partial f}{\partial y} = N$

$\int M\,dx$

$xe^{2y} + g(y)$

$2xe^{2y} + g'(y)$

$2xe^{2y} - \frac{1}{y} = 2xe^{2y} + g'$

$g'(y) = -\frac{1}{y}$

$\int g'(y) = -\int \frac{1}{y}$

$g(y) = -\ln y + c$

$xe^{2y} - \ln y + c = c$

$\boxed{xe^{2y} - \ln y = K}$

• EDO 2° Orden Reducible A 1° Orden

No se ve de forma explicita alguna de las dos variables

I $y'' = f(y, y')$

II $y'' = f(x, y')$

1. Identifique la variable que esta implicita
2. Escoga la sustitucion correcta

I. $y' = u$
$y'' = u\frac{du}{dy}$

II $y' = u$
$y'' = u'$

3. Remplace en la ecuacion original
4. Obtendra una EDO de primer orden, idetifique y resuelva

$$yy'' - (y')^3 = 0$$

• falta la variable "x"

• $y' = u$

$y'' = u\frac{du}{dy}$

• $yu\frac{du}{dy} - u^3 = 0$

$yu\frac{du}{dy} = u^3$

$\frac{du}{dy} = \frac{u^2}{y}$

$\int \frac{du}{u^2} = \int \frac{dy}{y}$

$-\frac{1}{u} + C = \ln|y|$

$-\frac{1}{y'} + C = \ln|y|$

$C - \ln|y| = \frac{1}{y'}$

$y' = \frac{1}{C - \ln|y|}$

• EDO RICATTI

$$P(x) + q(x)y + R(x)y^2 = y'$$

Cuentan con una solucion particular y se utilizo la sustitucion:

$$y = y_1 + \frac{1}{u}$$

1. Verifique la forma
2. Utilize la sustitucion con la solucion particular
3. Obtendra una EDO lineal (Puede que llegue a separable)

• $y' = 1 + x^2 - 2xy + y^2$

$y_1(x) = x$

• $y = y_1 + \frac{1}{u}$

$y = x + \frac{1}{u}$

$y' = 1 - \frac{1}{u^2} \cdot u'$

• $1 - \frac{1}{u^2} \cdot u' = 1 + x^2 - 2x\left(x + \frac{1}{u}\right) + \left(x + \frac{1}{u}\right)^2$

$\cancel{1} - \frac{1}{u^2} \cdot u' = \cancel{1} + \cancel{x^2} - \cancel{2x^2} - \cancel{\frac{2x}{u}} + \cancel{x^2} + \cancel{\frac{2x}{u}} + \frac{1}{u^2}$

$-\frac{u'}{u^2} = \frac{1}{u^2}$

$-u' = 1$

$\int u' = \int -1$

$u = -x + C$

$y = x + 1/u$
$y - x = 1/u$
$u = \frac{1}{y-x}$

$\frac{1}{y-x} = -x + C$

$y = \frac{1}{C-x} + x$

• EDO CON COEFICIENTES LINEALES

$$y' = \left(\frac{a_0x + b_0y + c_0}{a_1x + b_1y + c_1}\right)$$

Hay dos casos cuando se cortan y cuando son paralelas

Cuando se cortan

1. Verifique la forma
2. Halle el punto donde se cortan
3. remplace los puntos de corte en las siguientes sustituciones

$U = X - X_0$ $\quad V = Y - Y_0$
$du = dx$ $\quad dv = dy$

4. Queda una EDO Homogenea, resuelva

$(2x-y-1)dx + (3x+y-4)dy = 0$

- $2x - y - 1 = 0 \quad (-3)$
  $3x + y - 4 = 0 \quad (2)$

$-6x + 3y + 3 = 0$
$6x + 2y - 8 = 0$
$5y - 5 = 0$
$y_0 = 1$

$2x - 1 - 1 = 0 \quad x_0 = 1$
$2x = 2$

-

$U = x - 1 \quad x = U + 1$
$V = y - 1 \quad y = V + 1$

$du = dx \quad dv = dy$

$(2(U+1) - (V+1) - 1)du + (3(U+1) + V + 1 - 4)dv = 0$

$(2U + 2 - V - 1 - 1)du + 3U + 3 + V + 1 - 4$

$2U - V\, du + 3U + V\, dv = 0$

$2 - \frac{V}{U} du + 3 + \frac{V}{U} dv = 0$

- $W = \frac{V}{U} \quad V = WU$
  $\frac{dv}{du} = W + U\frac{dw}{du}$

$2 - \frac{V}{U} du = -3 - \frac{V}{U} dv$

$\frac{2 - V/U}{-3 - V/U} = \frac{dv}{du}$

$W + U\frac{dw}{du} = \frac{2-W}{-3-W}$

$U\frac{dw}{du} = \frac{2-W}{-3-W} - \frac{W}{1}$

$U\frac{dw}{du} = \frac{2 - W - (-3W - W^2)}{-3-W}$

$U\frac{dw}{du} = \frac{2 - W + 3W + W^2}{-3-W}$

$U\frac{dw}{du} = \frac{2W + W^2 + 2}{-3-W}$

$dw \frac{-3-W}{2W + W^2 + 2} = \frac{du}{U}$

$-2\arctan(W+1) - \frac{1}{2}\ln(W^2 + 2W + 2) + C$

$-2\arctan(W+1) - \frac{1}{2}\ln(W^2 + 2W + 2) + C = \ln U$

Cuando no se cortan

$y' f(Ax + By + c)$

$B \neq 0$

1. Verifique la forma
2. Utilice la sustitucion

$U = Ax + By + C$

$U' = A + By'$

$y' = \frac{U' - A}{B}$

- $y' = \tan^2(x+y)$

- $U = x + y$
  $\frac{du}{dx} = 1 + y'$

$y' = U' - 1$

$U' - 1 = \tan^2(U)$

$U' = \tan^2(U) + 1$

$\frac{dU}{dx} = \sec^2 U$

$\int \frac{du}{\sec^2 U} = \int dx$

$\int \frac{1 - \cos 2U}{2} du = \int dx$

$\frac{1}{2}(U - \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2U = x + c$

$\frac{x+y}{2} - \frac{1}{4}\operatorname{sen}(2x + 2y) = x + c$

APLICACIONES

- CRECIMIENTO

$\frac{dx}{dt} = Kx$

- DECRECIMIENTO

$\frac{dx}{dt} = -Kx$

- ENFRIAMIENTO
  (ley de enfriamiento de newton)

$\frac{dT}{dt} = K(T - T_m)$

T_m = Temperatura del medio

- MEZCLAS

$$\frac{dQ}{dt} = C_1 V_1 - C_2 V_2$$

C = Concentracion
V = Velocidad

En general

$$\frac{dQ}{dt} = C_1 V_1 - \frac{Q}{Vol} \cdot V_2$$

Si el volumen es variable (Por las V_1 y V_2)

$$\frac{dv}{dt} = (V_1 - V_2)$$

$$V(t) = V_0 + (V_1 - V_2)t$$

- **DINAMICA DE UNA PARTICULA**

$$M \frac{dv}{dt} = mg - \text{"resistencia del aire"}$$

$$M \frac{du}{dt} = mg - KV$$

$$M = \frac{Mg}{g} \qquad g = 32$$

M = masa
g = gravedad
K = constante
V = velocidad

- **TRAYECTORIAS ORTOGONALES**

1. Despejar C
2. Derivar
3. $M_1 \cdot M_2 = -1$
4. Solucion

- **LEY DE TORRICELLI**

$$\frac{dv}{dt} = -C\, A_h \sqrt{2gh}$$

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{A_h}{A_w} C \sqrt{2gh}$$

C = constante de friccion

Ah: Area del agujero

Aw = Area de la Superficie del Agua

g = gravedad (32)

h = altura

ECUACIONES DIFERENCIALES DE ORDEN SUPERIOR

• TEOREMA DE EXISTENCIA Y UNICIDAD

Encontrar intervalo para el PVI donde hay unico solucion

1. Analice la continuidad de los coeficientes recuerde que $a_n \neq 0$

$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} \dots$

2. Analice donde encajan las codiciones del PVI

$y(x) = \#$ $\quad y''(x) = \#$

$y'(x) = \#$ $\quad y'''(x) = \#$

$(x^2-9)\, y^{(4)} + \operatorname{Sen} x\, y'' - \ln(x+8)\, y = \tan^{-1} x$

$y(0) = 1$ $\quad y''(0) = -1$

$y'(0) = 2$ $\quad y'''(0) = 0$

- $x+8>0$, $x>-8$ $\quad x^2-9 \neq 0$, $(x+3)(x-3) \neq 0$, $x \neq 3$ $x \neq -3$
- $-8 \quad -3 \quad 0 \quad 3$

El PVI tiene unica solucion en $(-3,3)$

• EDO HOMOGENEA

$y^{(n)} + P_1 y^{(n-1)} + P_{n-1} y' = 0$

- Soluciones

$\{y_1, y_2\}$ Constituyen el conjunto fundamental de soluciones

$\{y_1, y_2\}$ C.F.S.

Las soluciones deben ser L.I.

$y_2 = u\, y_1$
↳ Funcion Variable

Para confirmar que las soluciones son LI se usa el Wronskiano

$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$

$W=0$
Las soluciones son LD en un intervalo I

$W \neq 0$
Las soluciones son LI en un intervalo I

El orden de la ecuacion determina el # de soluciones

La solucion general tiene la forma

$y(x) = c_1 y_1 + c_2 y_2 \dots$

$c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

- Cuando nos dan una solucion y_1

1. Estandarizar la EDOH (dejar la derivada de mayor orden sin coeficiente)
2. Identificar $P(x)$

$y'' + P(x) y' + q(x) y = 0$

3. Utilizamos reduccion de orden

$y_2 = y_1 \int \frac{e^{-\int P(x)dx}}{[y_1]^2} dx$

4. Solucione la integral y halle y_2
5. Damos la solucion general

$x^2 y'' + x y' + y = 0 \quad x>0$

$y_1 = \operatorname{Sen}(\ln(x))$

$a_n = x^2$ se hace cero en $x=0$ por tanto hay solucion en $\boxed{x>0}$ y en $x<0$

- $y'' + \frac{1}{x} y' + \frac{1}{x^2} y = 0$
- $P(x) = 1/x$
- $y_2 = \operatorname{Sen}(\ln(x)) \int \frac{e^{-\int 1/x \, d}}{[\operatorname{sen}(\ln(x))]}$

$\ln(x) = z$

$1/x\, dx = dz$

$y_2 = \operatorname{Sen} z \int \frac{1}{\operatorname{Sen}^2(z)} dz$

$y_2 = \operatorname{Sen} z \int \csc^2 z \, dz$

$y_2 = \operatorname{Sen} z\, (-\cot z)$

$y_2 = -\cancel{\operatorname{Sen} z}\, \frac{\cos z}{\cancel{\operatorname{Sen} z}}$

$Y_2 = -\cos z$

$Y_2 = -\cos(\ln(x))$

- $Y(x) = C_1 \operatorname{Sen}(\ln(x)) + C_2 (-\operatorname{Cos}(\ln(x)))$

$Y(x) = C_1 \operatorname{sen}(\ln(x)) - C_2 \cos(\ln(x))$

- EDOH NON COEFICIENTES CONSTANTES

Utilizamos una Ecuacion Caracteristica que depende del Orden de la ecuacion

$$a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = 0$$

$$a y'' + b y' + c y = 0$$

$$a m^2 + b m + c = 0$$

↳ Ecuacion Caracteristica de una EDOH 2 orden

1 Hallar las raices de la Ecuacion caracteristica correspondiente

2. Analice las raices teniendo en cuenta los 3 casos siguentes:

① Raices distintas

$m_1, m_2, \ldots m_n$ distintas

$$C.F.S \left\{ e^{m_1 x}, e^{m_2 x}, e^{m_n x} \right.$$

② Raices iguales

$m_1, m_2 \neq m_3$

$m_1 = m_2$

$$C.F.S \left\{ e^{m_1 x}, x e^{m_1 x}, e^{m_3 x} \right.$$

Las raices repetidas se multiplican por x^{k-1}

③ Raices complejas

$$m = \alpha \pm \beta i$$

α = Parte real

β = acompañante de i

$$C.F.S \left\{ e^{\alpha x}\cos(\beta x),\ e^{\alpha x}\operatorname{sen}(\beta x) \right.$$

Tenga en cuenta la identidad de euler para este caso

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\operatorname{sen}\theta$$

Se haran 4 ejemplos que contengan los casos

① $y''' - 6y'' + 12y' - 8y = 0$

$m^3 - 6m^2 + 12m - 8 = 0$

$(m-2)^3 = 0$

- $m = 2$ • Raices repetidas (3)

$$CFS \left\{ e^{2x}, x e^{2x}, x^2 e^{2x} \right.$$

$Y(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{2x} x + C_3 x^2 e^{2x}$

// //

② $16y^{(4)} + 24y'' + 9y = 0$

$16m^4 + 24m^2 + 9 = 0$

$t = m^2$

$16t^2 + 24t + 9 = 0$

$4t \quad 3$

$(4t+3)^2$

$(4m^2+3)^2$

$4m^2 + 3 = 0$

$\sqrt{m^2} = \sqrt{-\frac{3}{4}}$

- $m = \pm \frac{\sqrt{3}\, i}{4}$ Raiz repetida y Complejas

- $m_1 = e^{0x}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{4}x\right)$

$m_2 = x e^{0x}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{4}x\right)$

$m_3 = e^{0x}\operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{3}}{4}x\right)$

$m_4 = x e^{0x}\operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{3}}{4}x\right)$

$Y(x) = C_1\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{4}x\right) + C_2 x\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{4}x\right) + C_3\operatorname{Sen}\left(\frac{\sqrt{3}}{4}x\right) + C_4 x\operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{3}}{4}x\right)$

// //

③ $y^{(6)} - 7y^{(4)} - 18y'' = 0$

$M^6 - 7M^4 - 18M^2 = 0$

$M^2(M^4 - 7M^2 - 18M) = 0$

$M_1 = 0 \quad M_2 = 0$

Raices repetidas

$M^2(M^2-9)(M^2+2) = 0$

$M^2(M-3)(M+3)(M^2+2) = 0$

$M_3 = 3 \quad M_4 = -3$

Raices distintas

$M^2+2 = 0 \quad M = \pm\sqrt{2}\,i$

Raices complejas

CFS $\{1, x, e^{3x}, e^{-3x}, \cos(\sqrt{2}x), \mathrm{sen}(\sqrt{2}x)\}$

$Y(x) = C_1 + xC_2 + C_3e^{3x} + C_4e^{-3x} + C_5\cos(\sqrt{2}x) + C_6\,\mathrm{sen}(\sqrt{2}x)$

$M_1 = 0 \rightarrow e^{0x}$

$M_2 = 0 \rightarrow xe^{0x}$

$M_3 = 3 \rightarrow e^{3x}$

$M_4 = -3 \rightarrow e^{-3x}$

$M_5 = \sqrt{2}\,i \rightarrow \cos(\sqrt{2}x)$

$M_6 = -\sqrt{2}\,i \rightarrow \mathrm{sen}(\sqrt{2}x)$

④ $y^{(4)} + y = 0$

$M^4 + 1 = 0$

$(M^2)^2 + 1 = 0$

$M^2 = \pm i$

Usamos identidad de euler

$e^{\theta i} = \cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta$

$M^2 = e^{i\pi/2}$

$M^2 - e^{i\pi/2} = 0$

$M^2 - (e^{i\pi/4})^2 = 0$

$(M - e^{i\pi/4})(M + e^{i\pi/4})$

$M_1 = e^{i\pi/4} \quad M_2 = -e^{i\pi/4}$

$M_1 = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\,\mathrm{sen}(\pi/4)$

$M_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$

$M_2 = -\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - i\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right)$

$M_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$

Como M_1 no es el conjugado de M_2 es necesario incluir sus respectivos conjugado en CFS

$M_3 = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$

$M_4 = \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$

CFS $\{e^{\frac{\sqrt{2}}{2}x}\cos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x\right), e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}x}\cos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x\right), e^{\frac{\sqrt{2}}{2}x}\mathrm{sen}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x\right), e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}x}\mathrm{sen}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x\right)\}$

$Y_p = C_1e^{\frac{\sqrt{2}}{2}x}\cos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x\right) + C_2e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}x}\cos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x\right) + C_3e^{\frac{\sqrt{2}}{2}x}\mathrm{sen}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x\right) + C_4e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}x}\mathrm{sen}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x\right)$

En caso de no ser evidentes las raices de M cuando tiene grado mayor a 2 se puede utilizar

$a_n M^4 + M^3 + M^2 + M + a_0 = 0$

$\pm \frac{\text{Un divisor } a_0}{\text{Un divisor } a_n}$

$m^3 + 3m^2 - 4$

$\pm\frac{1}{1}; \pm\frac{2}{1}; \pm\frac{4}{1}$

$M = +1 \rightarrow (M-1)$

Con esto se puede hacer division

- EDO NO HOMOGENEA

$L(y) = g$

$y^{(n)} + P_1 y^{(n-1)} + P_{n-1} y' \ldots = g(x)$

- Soluciones

$y(x) = y_c(x) + y_p(x)$

$y_c(x)$ = Solucion complementaria que viene de E.D.H Asociada

$y_p(x)$ = Solucion particular

↓

Se puede hallar por:
- Variacion de parametro
- Coeficientes Indeterminados

- COEFICIENTES INDETERMINADOS

Condiciones:

* Coeficientes constantes
* $g(x)$ = Polinomio
  $e^{\alpha x}$
  $\text{Sen}(\beta x)$
  $\text{Cos}(\beta x)$

$g(x)$ Puede ser alguno de los anteriores o somas finitas de productos de estas funciones

En el caso anterior es prudente utilizar el principio de superposicion

Las soluciones pueden proponerse de acuerdo a la siguiente tabla

$g(x)$	y_p
1	A
$5x+7$	$Ax+B$
$3x^2-2$	Ax^2+Bx+C
x^3-x+1	Ax^3+Bx^2+Cx+D
$\text{Sen}(4x)$	$A\cos(4x)+B\,\text{sen}(4x)$
$\cos(4x)$	$A\cos(4x)+B\,\text{Sen}(4x)$
e^{5x}	Ae^{5x}
$(9x-2)e^{5x}$	$(Ax+B)e^{5x}$
x^2e^{5x}	$(Ax^2+Bx+C)e^{5x}$
$e^{3x}\text{Sen}(4x)$	$Ae^{3x}\cos(4x)+Be^{3x}\text{sen}(4x)$
$5x^2\,\text{Sen}(4x)$	$(Ax^2+Bx+C)\cos(4x) + (Ex^2+Fx+G)\text{sen}(4x)$
$xe^{3x}\cos(4x)$	$(Ax+B)e^{3x}\cos(4x) + (Cx+D)e^{3x}\text{Sen}(4x)$

2. Analice que $g(x)$ cumpla las formas propuestas
1. Resuelva la EDH asociada y y_c
3. Proponga y_p y remplace con sus respectivas derivadas en la ecuacion inicial "recuerde el principio de superposicion"
4. Agrupe x con el factor comun correspondiente
5. Agrupe lo que no tiene x con el factor comun correspondiente
6. Iguale coeficientes para hallar las constantes (A,B,C...)
7. Remplace en y_p
8. De la solucion general

$y(x) = y_c(x) + y_p(x)$

$y'' + y' - 6y = 2x$

- $m^2 + m - 6 = 0$

$\dfrac{-1 \pm \sqrt{1+24}}{2}$

$\dfrac{-1 \pm 5}{2}$

$m_1 = 2 \qquad m_2 = -3$

$y_c(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-3x}$

- $g(x) = 2x$
- $y_p = (Ax+B)$

$y_p' = A$

$y_p'' = 0$

$0 + A - 6(Ax+B) = 2x$

$-6Ax + A - 6B = 2x$

- $-6A = 2$
- $A - 6B = 0$

$A = -1/3$

$-6B = \frac{1}{3}$

$B = -\frac{1}{18}$

- $y_p(x) = -\frac{1}{3}x - \frac{1}{18}$
- $y(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-3x} + \left[-\frac{1}{3}x - \frac{1}{18}\right]$

$y(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-3x} - \frac{x}{3} - \frac{1}{18}$

- VARIACION DE PARAMETRO

Condiciones

* Ninguna restriccion

$g(x)$ no tiene ninguna de las dos formas del metodo anterior

1. Estandarizamos la Ecuacion
2. Resuelva la EDH asociada y $Y_c(x)$
3. Hallamos el Wronskiano con el CFS $W(y_1, y_2, \dots y_n)$
4. Identificamos $g(x)$ y proponemos:

$$Y_p(x) = U_1 y_1 + U_2 y_2 + \dots + U_n y_n$$

$$U_1' y_1 + U_2' y_2 + \dots + U_n' y_n = 0$$

$$U_1' y_1' + U_2' y_2' + \dots + U_n' y_n' = 0$$

$$\dots\dots\dots = g(x)$$

5. Utilizamos la regla de cramer para hallar $(U_1', U_2', \dots U_n')$

Ecuaciones Segundo Orden

$$U_1' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ g(x) & y_2' \end{vmatrix}}{W} \qquad \begin{bmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{bmatrix}$$

$$U_2' = \frac{\begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & g(x) \end{vmatrix}}{W}$$

Ecuaciones Orden 3

$$U_1' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & y_2 & y_3 \\ 0 & y_2' & y_3' \\ g(x) & y_2'' & y_3'' \end{vmatrix}}{W}$$

$$U_2' = \frac{\begin{vmatrix} y_1 & 0 & y_3 \\ y_1' & 0 & y_3' \\ y_1'' & g(x) & y_3'' \end{vmatrix}}{W}$$

$$U_3' = \frac{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & 0 \\ y_1' & y_2' & 0 \\ y_1'' & y_2'' & g(x) \end{vmatrix}}{W}$$

6. Integramos para hallar $(U_1, U_2, \dots U_n)$ y remplazamos en $Y_p(x)$
7. Damos la Solucion general $Y(x)$

$$Y(x) = Y_c(x) + Y_p(x)$$

- $y''' + y' = \sec(x)$
- $m^3 + m = 0$

$$m(m^2+1) = 0$$

$$m_1 = 0 \quad m_2 = -i \quad m_3 = i$$

$$\{e^{0x}, e^{0x}\cos(x), e^{0x}\operatorname{sen}(x)\}$$

$$Y_c(x) = C_1 + C_2 \cos(x) + C_3 \operatorname{sen}(x)$$

- $W(y_1, y_2, y_3) = \begin{vmatrix} 1 & \cos(x) & \operatorname{sen}(x) \\ 0 & -\operatorname{sen}(x) & \cos(x) \\ 0 & -\cos(x) & -\operatorname{sen}(x) \end{vmatrix}$

$$= \begin{vmatrix} -\operatorname{sen}(x) & \cos(x) \\ -\cos(x) & -\operatorname{sen}(x) \end{vmatrix}$$

$$= \operatorname{sen}^2(x) + \cos^2(x)$$

$$= \boxed{1}$$

- $g(x) = \sec(x)$
- $Y_p(x) = U_1(x) + U_2(x)\cos(x) + U_3(x)\operatorname{sen}(x)$
- $U_1' = \dfrac{\begin{vmatrix} 0 & \cos(x) & \operatorname{sen}(x) \\ 0 & -\operatorname{sen}(x) & \cos(x) \\ \sec(x) & -\cos(x) & -\operatorname{sen}(x) \end{vmatrix}}{W}$

$$= \frac{\sec(x)\begin{vmatrix} \cos(x) & \operatorname{sen}(x) \\ -\operatorname{sen}(x) & \cos(x) \end{vmatrix}}{1}$$

$$= \sec(x)\,(1)$$

$$U_1' = \sec(x)$$

$$U_2' = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & \operatorname{sen}(x) \\ 0 & 0 & \cos(x) \\ 0 & \sec(x) & -\operatorname{sen}(x) \end{vmatrix}}{W}$$

$$= \frac{\begin{vmatrix} 0 & \cos(x) \\ \sec(x) & -\operatorname{sen}(x) \end{vmatrix}}{1}$$

$$= -\sec(x) \cdot \cos(x)$$

$$U_2' = -\frac{\cos(x)}{\cos(x)}$$

$$U_2' = -1$$

$$U_3' = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \cos(x) & 0 \\ 0 & -\operatorname{sen}(x) & 0 \\ 0 & -\cos(x) & \sec(x) \end{vmatrix}}{W}$$

$$= \frac{\begin{vmatrix} -\operatorname{sen}(x) & 0 \\ -\cos(x) & \sec(x) \end{vmatrix}}{1}$$

$$= -\operatorname{sen}(x) \cdot \sec(x)$$

$$U_3' = -\frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)}$$

$U_1 = \int \sec(x)\,dx$

$U_1 = \ln|\sec(x)+\tan(x)|$

$U_2 = \int -1\,dx$

$U_2 = -x$

$U_3 = \int \frac{-\sin(x)}{\cos(x)}\,dx$

$u = \cos(x)$
$du = -\sin(x)\,dx$

$U_3 = +\int \frac{1}{u}\,du = +\ln|u|$

$U_3 = +\ln|\cos(x)|$

$y_p(x) = \ln|\sec(x)+\tan(x)| + [-x\cos(x)] + \ln|\cos(x)|\sin(x)$

$y_p(x) = \ln|\sec(x)+\tan(x)| + \ln|\cos(x)|\sin(x) - x\cos(x)$

- $y(x) = C_1 + C_2\sin(x) + C_3\cos(x) + \ln|\sec(x)+\tan(x)| + \ln|\cos(x)|\cdot\sin(x) - x\cos(x)$

Ahora veamos un ejemplo que utiliza los dos metodos

$y'' - 2y' + y = 4x^2 - 3 + x^{-1}e^x$

- EDH asociada

$m^2 - 2m + 1 = 0$

$(m-1)^2 = 0$

$m_{1,2} = 1$

$y_c(x) = C_1e^x + C_2xe^x$

- Wronskiano

$W(y_1,y_2) = \begin{vmatrix} e^x & xe^x \\ e^x & xe^x+e^x \end{vmatrix}$

$W = e^x(1+x)e^x - e^x x e^x$

$W = e^x x e^x + e^{2x} - xe^x e^x$

$e^x(xe^x + e^x - xe^x)$

$W = e^{2x}$

- Principio de superposición

$y_{p_1} = (Ax^2+Bx+C)$ C.I

$y_{p_2} = u_1(x)e^x + u_2(x)xe^x$ V.P

- Para $y_{p_1}(x)$

$y_{p_1}' = 2Ax + B$

$y_{p_1}'' = 2A$

$2A - 2(2Ax+B) + (Ax^2+Bx+C) = 4x^2 - 3$

$(-4A+B)x + Ax^2 + 2A - 2B + C = 4x^2 - 3$

Igualamos coeficientes

$A = 4$

$B - 4A = 0$

$B = 4A = 16$

$2A - 2B + C = -3$

$C = 2B - 2A - 3$

$C = 32 - 8 - 3$

$C = 21$

$y_{p_1}(x) = 4x^2 + 16x + 21$

- Para $y_{p_2}(x)$

$u_1' = \dfrac{\begin{vmatrix} 0 & xe^x \\ x^{-1}e^x & xe^x+e^x \end{vmatrix}}{e^{2x}}$

$u_1' = \dfrac{-e^{2x}}{e^{2x}}$

$u_1 = -x$

$u_2' = \dfrac{\begin{vmatrix} e^x & 0 \\ e^x & x^{-1}e^x \end{vmatrix}}{e^{2x}}$

$u_2' = \dfrac{1}{x}$

$u_2 = \ln|x|$

$y_{p_2}(x) = -xe^x + xe^x \ln(x)$

- Solucion general

$y(x) = C_1e^x + C_2e^x + 4x^2 + 16x + 21 + x\ln|x|e^x - xe^x$

- **ECUACION DE CAUCHY-EULER HOMOGENEAS (ECE)**

$ax^3y''' + bx^2y'' + cxy' + Dy = 0$

- **Soluciones**

Son del tipo

$y = x^m$

En general los ECE son iguales a las de orden superior vistas anteriormente basa con remplazar

X por $\ln|x|$ para $x>0$

X por $\ln|-x|$ para $x<0$

Contamos con la Ecuacion auxiliar de la forma:

$am(m-1)(m-2) + bm(m-1) + cm + D = 0$

Tenemos 3 posibles casos

① **Raices distintas**

$m_1, m_2, \dots m_n$ distintas

CFS $\{x^{m_1}, x^{m_2}, x^{m_3}\}$

② **Raices repetidas**

$m_1, m_2 \neq m_3$

$m_1 = m_2$

CFS $\{x^{m_1}, \ln(x)\, x^{m_2}, x^{m_3}\}$

③ **Raices complejas**

$m = \alpha \pm \beta i$

α = parte real

β = acompañante de i

CFS $\{x^{\alpha} \cos(\beta \ln(x)),\ x^{\alpha} \operatorname{sen}(\beta \ln(x))\}$

Recuerde la identidad de euler

$e^{i\theta} = \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta$

- **ECUACIONES DE CAUCHY-EULER NO HOMOGENEAS**

$ax^3y''' + bx^2y'' + cxy' + Dy = g(x)$

- **Soluciones**

$y(x) = y_c(x) + y_p(x)$

$y_c(x)$ = Solucion complementaria que viene de EDH Asociada

$y_p(x)$ = Solucion particular

↓

Solo podemos hallarla por:
- Variacion de parametro

- **VARIACION DE PARAMETRO**

Repetimos el procedimiento que para las EDO no H

$x^3y''' - 4x^2y'' + 8xy' - 8y = 4\ln x$

- $y''' - \frac{4}{x}y'' + \frac{8}{x^2}y' - \frac{8}{x^3}y = \frac{4\ln x}{x^3}$

- $m(m-1)(m-2) - 4m(m-1) + 8m - 8 = 0$

$m(m-1)(m-2) - 4m(m-1) + (m-1)8$

$(m-1)[m(m-2) - 4m + 8] = 0$

$(m-1)[m^2 - 2m - 4m + 8] = 0$

$(m-1)[m^2 - 6m + 8] = 0$

$(m-1)(m-2)(m-4) = 0$

$m_1 = 1;\ m_2 = 2;\ m_3 = 4$

$y_c(x) = C_1x + C_2x^2 + C_3x^4$

- $W(y_1, y_2, y_3) = \begin{vmatrix} x & x^2 & x^4 \\ 1 & 2x & 4x^3 \\ 0 & 2 & 12x^2 \end{vmatrix}$

$W = x\begin{vmatrix} 2x & 4x^3 \\ 2 & 12x^2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x^2 & x^4 \\ 2 & 12x^2 \end{vmatrix} + 0$

$W = 16x^4 - 10x^4$

$\boxed{W = 6x^4}$

- $g(x) = \dfrac{4\ln(x)}{x^3}$

$YP(x) = U_1 x + U_2 x^2 + U_3 x^4$

- $$U_1' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & x^2 & x^4 \\ 0 & 2x & 4x^3 \\ \frac{4\ln(x)}{x^3} & 2 & 12x^2 \end{vmatrix}}{W}$$

$$= \frac{\frac{4\ln(x)}{x^3}\begin{vmatrix} x^2 & x^4 \\ 2x & 4x^3 \end{vmatrix}}{6x^4}$$

$$= \frac{\frac{4\ln(x)}{x^3}(4x^5 - 2x^5)}{6x^4}$$

$$= \frac{8\ln(x) \cdot x^5}{6 \quad x^7}$$

$$U_1' = \frac{4}{3}\frac{\ln x}{x^2}$$

$$U_2' = \frac{\begin{vmatrix} x & 0 & x^4 \\ 1 & 0 & 4x^3 \\ 0 & \frac{4\ln(x)}{x^3} & 12x^2 \end{vmatrix}}{W}$$

$$U_2' = \frac{1}{6x^4}\left[-\frac{4\ln(x)}{x^3}\begin{vmatrix} x & x^4 \\ 1 & 4x^3 \end{vmatrix}\right.$$

$$= \frac{1}{6x^4}\left[-\frac{4\ln(x)}{x^3}(4x^4 - x^4)\right.$$

$$= -\frac{4\ln(x) \cdot x}{6x^4}$$

$$U_2' = -\frac{2}{3}\frac{\ln(x)}{x^3}$$

$$U_3' = \frac{\begin{vmatrix} x & x^2 & 0 \\ 1 & 2x & 0 \\ 0 & 2 & \frac{4\ln(x)}{x^3} \end{vmatrix}}{W}$$

$$= \frac{1}{6x^4}\left[\frac{4\ln(x)}{x^3}\begin{vmatrix} x & x^2 \\ 1 & 2x \end{vmatrix}\right.$$

$$= \frac{1}{6x^4}\left(\frac{4\ln(x)}{x^3}(2x^2 - x^2)\right)$$

$$= \frac{1}{6x^4}\,\frac{4\ln(x)}{x}$$

$$= \frac{2}{3}\,\frac{\ln(x)}{x^5} = U_3'$$

- $$U_1' = \frac{4}{3}\,\frac{\ln(x)}{x^2}$$

$\int U_1' = U$

$$\frac{4}{3}\int \frac{\ln(x)}{x^2}\,dx$$

$U = \ln(x)$ $\quad dv = 1/x^2$
$du = 1/x$ $\quad V = -1/x$

$$\frac{4}{3}\left[-\frac{\ln(x)}{x} + \int \frac{1}{x^2}\right]$$

$$\frac{4}{3}\left(-\frac{\ln(x)}{x} - \frac{1}{x}\right)$$

$$U_1 = \frac{4}{3}\left(-\frac{\ln(x)}{x} - \frac{1}{x}\right)$$

$\int U_2' = U_2$

$$-2\int \frac{\ln(x)}{x^3}\,dx$$

$U = \ln(x)$ $\quad dv = 1/x^3$
$du = \frac{1}{x}$ $\quad V = -\frac{1}{2x^2}$

$$-2\left[-\frac{\ln(x)}{2x^2} + \int \frac{1}{2x^3}\right]$$

$$-2\left(-\frac{\ln(x)}{2x^2} - \frac{1}{4x^2}\right)$$

$$U_2 = \frac{\ln(x)}{x^2} + \frac{1}{2x^2}$$

$\int U_3' = U_3$

$$\frac{2}{3}\int \frac{\ln(x)}{x^5}\,dx$$

$U = \ln(x)$ $\quad dV = 1/x^5$
$du = \frac{1}{x}$ $\quad V = -\frac{1}{4x^4}$

$$-\frac{\ln(x)}{4x^4} + \int \frac{1}{4x^5}$$

$$\frac{2}{3}\left[-\frac{\ln(x)}{4x^4} - \frac{1}{16x^4}\right]$$

$$U_3 = -\frac{\ln(x)}{6} - \frac{1}{24x^4}$$

$$Y_P(x) = -\frac{4(\ln(x))-4}{3x} + \frac{\ln(x)}{2x^2} + \frac{1}{2x^2} - \frac{\ln(x)}{6} - \frac{1}{24x^4}$$

$$Y_P(x) = -\frac{\ln(x)}{2} - \frac{7}{8}$$

$$Y(x) = Y_c(x) + Y_P(x)$$

$$Y(x) = C_1x + C_2x^2 + C_3x^4 - \frac{\ln(x)}{2} - \frac{7}{8}$$

• APLICACIONES

SISTEMA MASA-RESORTE

- Unidades

Fuerza	= Libras	newton	Dina
Masa	= Slug	Kg	gr
Longitud	= Pie	M	CM
gravedad	= 32	9,8	980

12 Pulgadas = Pie

Ley de Hooke

$F = K \cdot X$

$F = M \cdot g$

$M \cdot g = KX$

$M \cdot g = KS$

S = desplazamiento o alargamiento del resorte con la masa

F = Peso

K = Constante del resorte

M: Masa

En los sistemas masa resorte buscamos

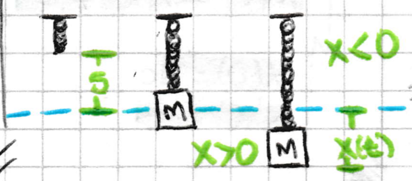
$X(t)$ = Posicion de la masa en el instante t

Teniendo un PVI que cumple casi siempre

$X(0)$ = Posicion de masa x_0 en intante inicial $(t=0)$

$X'(0)$ = Velocidad de v_0 la masa en el instante t

Estas condiciones varian con el PVI



- - - Posicion de equilibrio

Hacia arriba de la posicion de equilibrio los valores son negativos

Hay dos tipos de movimiento en general

- Movimiento Libre
- Movimiento Forzado

Para graficar En las soluciones del tipo:

$C_1\cos(wt) + C_2\operatorname{sen}(wt)$

=

Es igual

=

$A\cos(wt - \phi)$

$A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}$

$\tan\phi = \frac{C_1}{C_2}$

- Posibles Variables:

Partiendo de la ecuacion

$$mx'' + \beta x' + kx = f(t)$$

M: Masa

β = Constante de amortiguamiento

K: Constante del resorte

$F(t)$ = Fuerza Externa

$\omega = \sqrt{\frac{K}{m}}$ = Frecuencia natural

$T = \frac{2\pi}{\omega}$ = Periodo

$f = \frac{1}{T}$ = frecuencia

• MOVIMIENTOS O VIBRACIONES LIBRES

$$Mx'' + \beta x' + Kx = 0$$

Es decir que son homogeneos $f(t) = 0$

- VIBRACIONES LIBRES NO AMORTIGUADAS

$$\beta = 0$$

$$mx'' + Kx = 0$$

- VIBRACIONES LIBRES AMORTIGUADAS

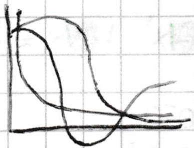
$$\beta \neq 0$$
$$\beta > 0$$

$$mx'' + \beta x' + Kx = 0$$

* Raices diferente

$$r_1 \neq r_2$$

Sobreamortiguado



* Raices Iguales

$$r_1 = r_2$$

Criticamente Amortiguado

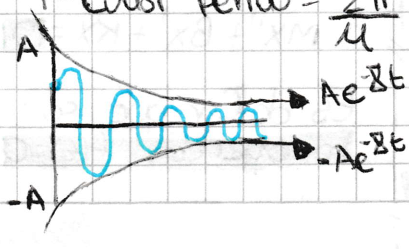
* Raices Imaginarias o completas

$$r_{1,2} = \alpha \pm \mu i$$

Subamortiguado

$$x(t) = A e^{-\gamma t} \operatorname{sen}(\gamma t + \phi)$$

$$T = \text{Cuasi periodo} = \frac{2\pi}{\mu}$$



• MOVIMIENTOS O VIBRACIONES FORZADAS

$$mx'' + \beta x' + Kx = f(t)$$

$$x(t) = x_c(t) + x_p(t)$$

$x_c(t)$ = Solucion transitoria

$x_p(t)$ = Solucion de estado estable

↓

Utilizamos coeficientes indeterminados

- VIBRACIONES FORZADAS NO AMORTIGUADAS

$$\beta = 0$$

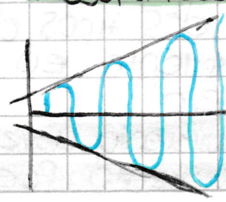
$$mx'' + Kx = f(t)$$

$$x(0) = x_0$$
$$x'(0) = v_0$$

$$x_c(t) = C_1 \operatorname{sen}(\omega t) + C_2 \cos(\omega t)$$

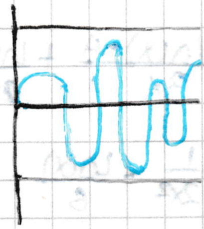
$$x_p(t) = A \operatorname{sen}(rt) + B \cos(rt)$$

* $r = \omega$ RESONANCIA



La propuesta solucion es repetida * t

* $r \neq \omega$



La propuesta no es repetida queda igual

- VIBRACIONES FORZADAS AMORTIGUADAS

$$\beta \neq 0$$
$$\beta > 0$$

$$mx'' + \beta x + Kx = 0$$

Estan precen los tres posibles casos de raices

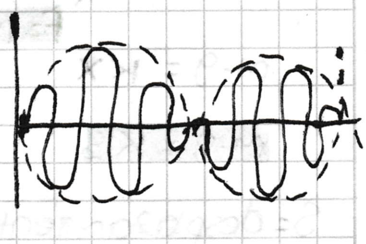
$$x_p(t) = A \operatorname{sen}(rt) + B \cos(rt)$$

Esto se cumple para los tres casos

* Pulsacion

$$x(t) = A(\cos(\omega t) - \cos(\delta t))$$

$$x(t) = -2A \operatorname{sen}\left(\frac{\omega t + \delta t}{2}\right) \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\omega t - \delta t}{2}\right)$$



TRANSFORMADA DE LAPLACE

- **Principales**

- $\mathcal{L}\{1\} = \dfrac{1}{s}$ $\quad s>0$
- $\mathcal{L}\{t^n\} = \dfrac{n!}{s^{n+1}}$ $\quad s>0$
- $\mathcal{L}\{e^{at}\} = \dfrac{1}{s-a}$ $\quad s>a$
- $\mathcal{L}\{\cos(at)\} = \dfrac{s}{s^2+a^2}$ $\quad s>a$
- $\mathcal{L}\{\text{sen}(at)\} = \dfrac{a}{s^2+a^2}$ $\quad s>0$
- $\mathcal{L}\{\cosh(at)\} = \dfrac{s}{s^2-a^2}$ $\quad s>|a|$
- $\mathcal{L}\{\text{senh}(at)\} = \dfrac{a}{s^2-a^2}$ $\quad s>|a|$

$|a|<s \Leftrightarrow -s<a<s$

$|a|>s \Leftrightarrow a>s$
$\qquad\qquad\quad a<-s$

$\cosh(at) = \dfrac{e^{at}+e^{-at}}{2}$

$\text{senh}(at) = \dfrac{e^{at}-e^{-at}}{2}$

LINEALIDAD
(aplica para $\mathcal{L}^{-1}$)
La transformada de una suma es la suma de las transformadas de cada termino

- **Inversos**

- $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s}\right\} = 1$
- $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{n!}{s^{n+1}}\right\} = t^n$
- $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s-a}\right\} = e^{at}$
- $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{s}{s^2+a^2}\right\} = \cos(at)$
- $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{a}{s^2+a^2}\right\} = \text{sen}(at)$
- $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{s}{s^2-a^2}\right\} = \cosh(at)$
- $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{a}{s^2-a^2}\right\} = \text{senh}(at)$

Para los $\mathcal{L}^{-1}$ es útil tener presente:

1. Completar cuadrados

$$\left(\frac{b}{2a}\right)^2$$

2. Fracciones Parciales

- Cuando hay irreducibles

$$\frac{A}{s} \; ; \; \frac{As+B}{(s^2+1)} \; ; \; \frac{As^2+Bs+D}{(s^3+1)}$$

- Cuando no tenemos valores para hallar las constantes derivamos a medida que remplazamos

- **Derivadas**

$\mathcal{L}\{y(t)\} = Y(S) \to$ transformada de la solución $y(t)$

$\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\} = S^n\{f(t)\} - S^{n-1}f(0) - S^{n-2}f'(0)\ldots$
$- S f^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)$

$\mathcal{L}^{-1}\, Y(S) = y(t) \to$ Solución del PVI

$\mathcal{L}\{f''(t)\} = S^2\mathcal{L}\{f(t)\}$
$- Sf(0) - f'(0)$

$\mathcal{L}\{f'''(t)\} = S^3\,\mathcal{L}\{f(t)\}$
$- S^2f(0) - Sf'(0)$
$- f''(0)$

- **Traslación**

- Traslación Eje S $\quad t \to S$

$\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\} = F(S-a) = \mathcal{L}\{f(t)\}\big|_{S=S-a}$

$\mathcal{L}^{-1}\{F(S-a)\} = e^{at}\,\mathcal{L}^{-1}\{F(S)\}$

- $\mathcal{L}\{e^{-8t}\,\text{sen}(3t)\}$

$\frac{3}{S^2+9}\Big|_{S=S+8} \qquad \frac{3}{(S+8)^2+9}$

- $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{5}{(25)+(S-4)^2}\right\}$

$e^{4t}\cdot\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{5}{25+S^2}\right\}$

$e^{4t}\cdot\text{sen}(5t)$

$f(t)\begin{cases} h(t) & 0 \le a_1 \\ g(t) & a_1 \le t \le a_2 \\ z(t) & a_M \le t \end{cases}$

ESTO SE ESCRIBE EN TERMINOS DE FUNCION ESCALON

$U_c(t) = U(t-c) = \begin{cases} 1 & t \ge c \\ 0 & 0 \le t < c \end{cases}$

$\mathcal{L}\{U_c(t)\} = \frac{e^{-sc}}{S}$

$U_0(t) = 1$

- Traslación de t

$$\mathcal{L}\{U_c(t)\cdot f(t)\} = e^{-cs}\,\mathcal{L}\{f(t+c)\}$$ $U \to s \to t$

$$\mathcal{L}^{-1}\{e^{-cs}\,F(s)\} = U_c(t)\,\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}_{t=t-c}$$

• $U_2(t)\,(t-3) - U_3(t-2)$ $\quad(\mathcal{L})$

$e^{-2s}\,\mathcal{L}\{(t+2)-3\} - e^{-3s}\{t+3-2\}$

$e^{-2s}\,\mathcal{L}\{t-1\} - e^{-3s}\{t+1\} = e^{-2s}\left(\frac{1}{s^2}-\frac{1}{s}\right) - e^{-3s}\left(\frac{1}{s^2}+\frac{1}{s}\right)$

• $\dfrac{e^{-\pi s}}{s^3}$ $\quad(\mathcal{L}^{-1})$

$U_\pi\ \frac{1}{2}\,t^2$

$U_\pi(t)\cdot\dfrac{(t-\pi)^2}{2}$

TRANSFORMADA DE UNA FUNCION PERIODICA

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{\int_0^T e^{-st}\,f(t)\,dt}{1-e^{-sT}}$$ T= Periodo

$\hookrightarrow f(t+T) = f(t)\ \forall t \geq 0$

• $f(t) = \begin{cases} t & 0 \leq t \leq 1 \\ 2-t & 1 \leq t < 2 \\ 0 & 2 \leq t < 3 \end{cases}$ Que cumple $f(t+3) = f(t)\ \forall t \geq 0$

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{\int_0^3 e^{-st}\,f(t)\,dt}{1-e^{-3s}}$$

$$\int_0^3 e^{-st}\,f(t)\,dt = \int_0^1 e^{-st}\,t\,dt + \int_1^2 e^{-st}\,(2-t)\,dt + \cancel{\int_2^3 e^{-st}\,0\,dt} \to 0$$

- Cuando tenemos $\mathcal{L}\{t^n f(t)\}$ -

$$\mathcal{L}\{t^n f(t)\} = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} \mathcal{L}\{f(t)\}, \quad s>c$$

$$\mathcal{L}\{t^n f(t)\} = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} F(s) \quad s>c$$

Tendremos PVI con una condición extra

- $$\text{PVI}\begin{cases} ty'' - y' = 2t^2 \\ y(0)=0 \\ y'(0)=0 \\ y''(0)=5 \end{cases}$$

$Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}$

$\mathcal{L}\{ty''-y'\} = \mathcal{L}\{2t^2\}$

$\mathcal{L}\{ty''\} - \mathcal{L}\{y'\} = 2\,\frac{2}{s^3}$

$(-1)\frac{d}{ds}\,\mathcal{L}\{y''\} - \mathcal{L}\{y'\} = \frac{4}{s^3}$

$(-1)\frac{d}{ds}\left[s^2 Y(s) - s\,\cancel{y(0)}^{0} - \cancel{y'(0)}^{0}\right] - [s Y(s) - \cancel{y(0)}^{0}] = \frac{4}{s^3}$

$(-1)\frac{d}{ds}\left[s^2 Y(s)\right] - s Y(s) = \frac{4}{s^3}$

$(-1)\left[2s Y(s) + s^2 Y'(s)\right] - s Y(s) = \frac{4}{s^3}$

$-\left[s^2 Y'(s) + 3s Y(s)\right] = \frac{4}{s^3}$

$s^2 Y'(s) + 3s Y(s) = \frac{-4}{s^3}$

$Y'(s) + \frac{3}{s} Y(s) = \frac{-4}{s^5}$ EDO 1er orden lineal

$FI = e^{\int 3/s} = e^{\ln s^3} = s^3$

$\int \frac{d}{ds}\left[s^3 Y(s)\right] = \int -\frac{4}{s^2}$

$s^3 Y(s) = \frac{4}{s} + C$

$Y(s) = \frac{4}{s^4} + \frac{C}{s^3}$

$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\}$

$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{4}{s^4} + \frac{C}{s^3}\right\}$

$\frac{2}{3}t^3 + \frac{C}{2}t^2 \qquad \frac{C}{2} \to \hat{C}$

$y(t) = \frac{2}{3}t^3 + \hat{C}t^2$

Acá usamos la condición extra

$y'(t) = 2t^2 + 2\hat{C}t$

$y''(t) = 4t + 2\hat{C}$

$y(0)=0$ //

$y'(0)=0$ //

$y''(0) = 5$

$5 = 2\hat{C}$

$\hat{C} = 5/2$

$$\boxed{y(t) = \frac{2}{3}t^3 + \frac{5}{2}t^2}$$

TRANSFORMADA DE UNA INTEGRAL

- Producto de convolución

$$f * g = g * f \to (f*g)(t) = \int_0^t f(\tau)\, g(t-\tau)\, d\tau$$

o

$$(f*g)(t) = \int_0^t f(t-\tau)\, g(\tau)\, d\tau$$

- $\mathcal{L}\{\int_0^t e^{-2\tau} \cos(\tau)\, d\tau\}$

$-2\tau = -2\tau + 2t - 2t$
$= 2(t-\tau) - 2t$

$\mathcal{L}\{\int_0^t e^{2(t-\tau)-2t} \cos(\tau)\, d\tau$

$\mathcal{L}\{e^{-2t} \int_0^t e^{2(t-\tau)} \cos(\tau)\, d\tau\}$ → Se aplica el teorema tratado en la siguiente viñeta

$\mathcal{L}\{e^{-2t} (e^{2t} * \cos(t))$

$\frac{1}{s-2} \cdot \frac{1}{s^2+1} \Big|_{s = s+a}$

$\frac{1}{s} \cdot \frac{s+2}{(s+2)^2+1}$

- Teorema

$$\mathcal{L}\{(f*g)(t)\} = \mathcal{L}\{f(t)\} \cdot \mathcal{L}\{g(t)\} = F(s) \cdot G(s)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s) \cdot G(s)\} = (f*g)(t)$$

- $\mathcal{L}\{e^{2t} * \operatorname{Senh}(4t)\}$

$\frac{1}{s-2} \cdot \frac{4}{s^2-16}$

- $\mathcal{L}\{t \int_0^t \operatorname{Sen}(\tau)\, d\tau\}$

$-\frac{d}{ds} \mathcal{L}\{1 * \operatorname{Sen}(t)\}$

$-\frac{d}{ds} \left(\frac{1}{s} \cdot \frac{1}{s^2+1}\right)$

$$\boxed{\mathcal{L}\{\int_0^t f(\tau)\, d\tau\} = \frac{F(s)}{s} \qquad \mathcal{L}^{-1}\{\frac{F(s)}{s}\} = \int_0^t f(\tau)\, d\tau}$$

FUNCION IMPULSO UNITARIO (DELTA DE DIRAC)

$$\mathcal{L}\{\delta(t-t_0)\} = e^{-t_0 s}$$

$$\mathcal{L}\{f(t) \cdot \delta(t-t_0)\} = f(t_0) \cdot e^{-t_0 s}$$

$$\bullet \begin{cases} y'' + \omega^2 y = \delta(t - \pi/\omega) & \omega \neq 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

$$Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}$$

$$\mathcal{L}\{y'' + \omega^2 y\} = \mathcal{L}\{\delta(t - \pi/\omega)\}$$

$$s^2 Y(s) - s\, \underbrace{y(0)}_{1} - \underbrace{y'(0)}_{0} + \omega^2 [Y(s)] = e^{-\frac{\pi s}{\omega}}$$

$$(s^2 + \omega^2)\, Y(s) = e^{-\frac{\pi s}{\omega}} + s$$

$$Y(s) = \frac{e^{-\frac{\pi s}{\omega}}}{s^2 + \omega^2} + \frac{s}{s^2 + \omega^2}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = y(t)$$

$$y(t) = U_{\pi/\omega} \frac{1}{\omega} \operatorname{sen}(\omega t) + \cos(\omega t)$$

$$y(t) = U_{\pi/\omega} \frac{1}{\omega} \operatorname{sen}(\omega t - \pi) + \cos(\omega t)$$

$$\hookrightarrow \operatorname{sen}(\omega t)\, \underbrace{\cancel{\cos(\pi)}}_{-1} - \underbrace{\cancel{\operatorname{sen}(\pi)}}_{0} \cos(\omega t)$$

$$y(t) = -U_{\pi/\omega} \frac{1}{\omega} \operatorname{sen}(\omega t) + \cos(\omega t)$$

SISTEMAS DE EDO LINEALES

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES HOMOGENEOS

$$x' = ax + by$$
$$y' = cx + dy$$

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

$$X' = AX \qquad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Para resolver el sistema de ecuaciones hallamos los valores y vectores propios

$$[\det(A - \lambda I) = 0]$$

Caso 1 = Valores propios distintos $\lambda_1 \neq \lambda_2$

La solucion sera de la forma

$$X = C_1 \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} e^{\lambda_1 t} + C_2 \begin{pmatrix} W_1 \\ W_2 \end{pmatrix} e^{\lambda_2 t}$$

- $x' = 2x + 2y$
  $y' = x + 3y$
- $X' = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} X$
- $\det(A - \lambda I) = 0$

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(2-\lambda)(3-\lambda) - 2 = 0$$
$$6 - 2\lambda - 3\lambda + \lambda^2 - 2 = 0$$
$$\lambda^2 - 5\lambda + 4 = 0$$
$$(\lambda - 1)(\lambda - 4) = 0$$

$\lambda_1 = 1$ Valor propio 1
$\lambda_2 = 4$ Valor propio 2

- $\lambda_1 = 1$

$$\begin{pmatrix} 2-1 & 2 \\ 1 & 3-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$V_1 + 2V_2 = 0$$
$$V_1 = -2V_2$$

Damos valores a conveniencia

$$V_2 = -1 \Rightarrow V_1 = 2$$

$$\begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{Vector propio 1}$$

- $\lambda_2 = 4$

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_1 \\ W_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$-2W_1 + 2W_2 = 0$$
$$W_1 = W_2$$

$$\begin{pmatrix} W_1 \\ W_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{Vector propio 2}$$

- $X = C_1 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} e^{t} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{4t}$

Caso 2 = Valores propios iguales $\lambda_1 = \lambda_2$ (repetidos)

La solucion es de la forma

$$X = C_1 \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} e^{\lambda t} + C_2 e^{\lambda t} \left[\begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} W_1 \\ W_2 \end{pmatrix} \right]$$

Cuando tenemos un λ repetido con un solo vector propio asociado usamos

$$\begin{pmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_1 \\ W_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} e & b \\ c & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_1 \\ W_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix}$$

- $x' = 3x - 18y$
  $y' = 2x - 9y$

- $X' = \begin{pmatrix} 3 & -18 \\ 2 & -9 \end{pmatrix} X$

- $\det(A - \lambda I) = 0$

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & -18 \\ 2 & -9-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(3-\lambda)(-9-\lambda) + 36 = 0$$
$$\lambda^2 + 6\lambda - 27 + 36 = 0$$
$$(\lambda+3)^2 = 0$$
$$\lambda_1 = -3$$
$$\lambda_2 = -3$$

- $\lambda_1 = -3$

$$\begin{pmatrix} 3+3 & -18 \\ 2 & -9+3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$2V_1 - 6V_2 = 0$$
$$V_1 - 3V_2 = 0$$
$$V_1 = 3V_2$$

$$\begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- $\begin{pmatrix} 6 & -18 \\ 2 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_1 \\ W_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 6 & -18 \\ 2 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_1 \\ W_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$2W_1 - 6W_2 = 1$$
$$W_1 - 3W_2 = 1/2$$
$$W_1 = \frac{1}{2} - 3W_2$$

$$\begin{pmatrix} W_1 \\ W_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- $X = C_1 e^{-3t} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{-3t} \left[\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \end{pmatrix} \right]$

Caso 3: Si hay valores propios complejos

$$\lambda = \alpha \pm \beta i$$

Usamos uno solamente ya que con la identidad de euler sale el resultado completo

$$X = e^{\alpha t} \left[C_1 \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} W_1 \\ W_2 \end{pmatrix} \right.$$

- $X' = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} X$

- $\det(A - \lambda I) = 0$

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & -5 \\ 5 & -4-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(4-\lambda)(-\lambda-4) + 25 = 0$$
$$-16 - 4\lambda + 4\lambda + \lambda^2 + 25 = 0$$
$$\lambda^2 + 9 = 0$$
$$\lambda = \pm 3i$$

- $\lambda = 3i$

$$\begin{pmatrix} 4-3i & -5 \\ 5 & -4-3i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(4-3i)V_1 - 5V_2 = 0$$

$$\begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{4-3i}{5} \end{pmatrix}$$

- $\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{4}{5} - \frac{3i}{5} \end{pmatrix} e^{3it}$ $\quad e^{i\theta} = \cos\theta + i\operatorname{sen}\theta$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{4}{5} - \frac{3i}{5} \end{pmatrix} \cos(3t) + i\operatorname{Sen}(3t)$$

$$\begin{pmatrix} \cos(3t) + i\operatorname{sen}(3t \\ \frac{4}{5}\cos(3t) + \frac{4}{3} i\operatorname{sen}(3t) - \frac{3i}{5}\cos(3t) + \frac{3}{5} \ldots \end{pmatrix}$$

$$sen(3t) \Big)$$

$$\begin{pmatrix} \cos(3t) + i\,sen(3t) \\ \frac{4}{5}\cos(3t) + \frac{4}{5}\,i\,sen(3t) - \frac{3i}{5}\cos(3t) + \frac{3}{5}\,sen(3t) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \cos(3t) \\ \frac{4}{5}\cos(3t) + \frac{3}{5}\,sen(3t) \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} sen(3t) \\ \frac{4}{5}\,sen(3t) - \frac{3}{5}\cos(3t) \end{pmatrix}$$

•

$$X = C_1 \begin{pmatrix} \cos(3t) \\ \frac{4}{5}\cos(3t) + \frac{3}{5}\,sen(3t) \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} sen(3t) \\ \frac{4}{5}\,sen(3t) - \frac{3}{5}\cos(3t) \end{pmatrix}$$

—— // —— // —— // ——

• Se sabe que $r = 5+2i$ es un valor propio de una matriz A 2x2 si $\xi \begin{pmatrix} 1 \\ 1-2i \end{pmatrix}$ es vector propio halle X

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1-2i \end{pmatrix} e^{5t} \cdot e^{2it}$$

$$e^{5t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1-2i \end{pmatrix} e^{2it}$$

$$e^{5t} \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1-2i \end{pmatrix} \cos(2t) + i\,sen(2t) \right]$$

$$e^{5t} \begin{bmatrix} \cos(2t) + i\,sen(2t) \\ \cos(2t) + i\,sen(2t) - 2i\cos(2t) + 2\,sen(2t) \end{bmatrix}$$

$$e^{5t} \left[\begin{pmatrix} \cos(2t) \\ \cos(2t) + 2\,sen(2t) \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} sen(2t) \\ sen(2t) - 2\cos(2t) \end{pmatrix} \right]$$

$$X(t) = e^{5t} \left[C_1 \begin{pmatrix} \cos(2t) \\ \cos(2t) + 2\,sen(2t) \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} sen(2t) \\ sen(2t) - 2\cos(2t) \end{pmatrix} \right]$$

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES NO HOMOGENEAS

$$X' = AX + F$$

La solucion general es de la forma

$$X = X_c + X_p$$

X_c = Solucion complementario

X_p = Solucion particular

Hallamos primero X_c solucionando la homogenea asociada

Luego tomamos las soluciones de X_c para definir la matriz fundamental Ψ

$$X_c = C_1 X_1 + C_2 X_2$$

$$\Psi = \begin{pmatrix} | & | \\ X_1 & X_2 \\ | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix}$$

Para hallar X_p necesitamos Ψ^{-1}

$$\Psi^{-1} = \frac{1}{\det \Psi} \begin{pmatrix} y_2 & -x_2 \\ -y_1 & x_1 \end{pmatrix}$$

Ahora X_p tendra la forma

$$X_p = \Psi \int \Psi^{-1} F \, dt$$

Para hallar las constantes necesitamos una condicion inicial $X(0)$ y usamos

$$\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \Psi^{-1}(0) \left[X(0) - X_p(0) \right]$$

• $X' = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^t$

• $\begin{vmatrix} 0-\lambda & 2 \\ -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0$

$$-\lambda(3-\lambda)+2=0$$
$$-3\lambda+\lambda^2+2=0$$
$$(\lambda-2)(\lambda-1)=0$$

- $\lambda=2$

$$\begin{pmatrix}-2 & 2\\ -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}V_1\\ V_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \qquad \begin{matrix}-V_1+V_2=0\\ V_2=V_1\end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix}V_1\\ V_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

- $\lambda=1$

$$\begin{pmatrix}-1 & 2\\ -1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}W_1\\ W_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \qquad \begin{matrix}-W_1+2W_2=0\\ 2W_2=W_1\end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix}W_1\\ W_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$$

- $X_c(t)=C_1e^{2t}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}+C_2e^{t}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$

- $\Psi=\begin{pmatrix}e^{2t} & 2e^{t}\\ e^{2t} & e^{t}\end{pmatrix}$

$$\det\Psi=e^{3t}-2e^{3t}=-e^{3t}$$

- $\Psi^{-1}=\dfrac{-1}{e^{3t}}\begin{pmatrix}e^{t} & -2e^{t}\\ -e^{2t} & e^{2t}\end{pmatrix}$

$$\Psi^{-1}=\begin{pmatrix}-e^{-2t} & 2e^{-2t}\\ e^{-t} & -e^{-t}\end{pmatrix}$$

$$\Psi^{-1}\cdot F=\begin{pmatrix}-e^{-2t} & 2e^{-2t}\\ e^{-t} & -e^{-t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e^{t}\\ -e^{t}\end{pmatrix}$$

$$\Psi^{-1}\cdot F=\begin{pmatrix}-e^{-t}-2e^{-t}\\ 1+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3e^{-t}\\ 2\end{pmatrix}$$

- $X_p=\Psi\int\begin{pmatrix}-3e^{-t}\\ 2\end{pmatrix}dt$

$$X_p=\Psi\cdot\begin{pmatrix}3e^{-t}\\ 2t\end{pmatrix}$$

$$X_p=\begin{pmatrix}e^{2t} & 2e^{t}\\ e^{2t} & e^{t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3e^{-t}\\ 2t\end{pmatrix}$$

$$X_p=\begin{pmatrix}3e^{t}+4te^{t}\\ 3e^{t}+2te^{t}\end{pmatrix}$$

- $X=X_c+X_p$

$$X=C_1e^{2t}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}+C_2e^{t}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix}e^{t}+\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}te^{t}$$

- Hallemos C_1 y C_2 con

$$X(0)=\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}$$

- $\begin{pmatrix}C_1\\ C_2\end{pmatrix}=\Psi^{-1}(0)\left[X(0)-X_p(0)\right]$

$$\begin{pmatrix}C_1\\ C_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 1 & -1\end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix}\right]$$

$$\begin{pmatrix}C_1\\ C_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 1 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-3\\ -1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}C_1\\ C_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3-2\\ -3+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ -2\end{pmatrix}$$

- $X(t)=e^{2t}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}-2e^{t}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}+e^{t}\begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix}+te^{t}\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}$